2018.05.14. 최종수정

두 변의 길이와 끼인각이 예각으로 주어진 삼각형의 넓이 :

<u>https://goo.gl/ryYMoL</u> (홈페이지) <u>https://goo.gl/TZCioQ</u> (구글드라이브)

위 링크를 클릭하면 가장최근 문서를 받을 수 있습니다.

2018년 6월 16일 실시할 창원수학문화원에서 교사대상으로 실시할 Geogebra 기초적 사용에 대하여 강의할 내용의 일부입니다. 강의록 내용에 대한 문의나 오탈자 의견 있으시면 <u>min7014@nate.com</u> 으로 연락주시면 감사하겠습니다.

아래의 프로그램 링크는 강의록을 집필당시 사용한 Geogebra 버전입니다. Geogebra가 너무 많이 변경되었다고 싶으면 아래에서 받으셔서 익히시기 바랍니다.

[GeoGebra 5.0.462.0-d (02 May 2018) 설치파일] Installer : <u>https://goo.gl/SsdFBd</u> (From Home Page) Portable : <u>https://goo.gl/FxJxES</u> (From Home Page) Installer : <u>https://goo.gl/dqtbfk</u> (From Google Drive) Portable : <u>https://goo.gl/zwundc</u> (From Google Drive)

〈참고자료〉

Geogebra 설치 : <u>http://me2.do/Gfim8elK</u>

민은기 선생님의 수학자료실 : <u>http://min7014.iptime.org</u> 민은기 선생님의 수학자료실 : <u>http://www.facebook.com/min7014</u> 민은기 선생님의 수학자료실 페이스북 : <u>https://www.facebook.com/mineungimath</u> 민은기 선생님의 수학자료실 YouTube Channel : <u>https://goo.gl/JpzU5i</u> 민은기 선생님의 수학자료실 twitter : <u>https://twitter.com/mineungi</u> Geogebra와 수학의 시각화 : ISBN 979-11-87541-13-4



https://ggbm.at/gsARCQs5 책자료실(지오지브라 튜브)

Geogebra 공식 홈페이지 : <u>http://www.geogebra.org</u>

〈문서 변경이력〉

2018.05.14. 경남과학고등학교 현장연구에 실습을 시킨결과 처음으로 각에 대 하여 체크상자를 만들 때 아무설명 없이 넘어가는 부분에 대한 질문이 들어 와서 앞의 방법대로란 문구를 추가하여 이해도를 높였음.<--35기 경남과고 윤동규

2018.05.14. 체크상자에 마우스를 위치시켰을 때 진릿값이 나타나지 않는 경 우에 대하여 질문했다. 결론은 이동도구를 선택한 상태에서 위치시켜야지 진 릿값이 나타난다. 이문구를 추가했다.<--35기 경남과고 윤동규 2018.05.11. 예각삼각형의 닓이를 두 변의 길이와 끼인각이 예각으로 주어진 삼각형의 넓이로 변경

집필당시 Geogebra 프로그램 링크 추가 2018.05.10. 강의록 작성

두 변의 길이와 끼인각이 예각으로 주어진 삼각형의 넓이

두 변의 길이와 끼인각이 예각으로 주어진 삼각형의 넓이에 관한 수업자료를 만 들어 보면서 Geogebra의 기본기능을 익혀보도록 하겠습니다. Geogebra를 접하는 경우라 생각하고 다소 지루하지만, 하나하나 자세히 설명하도록 하겠습니다. Geogebra를 이미 사용하셔서 각각의 기능을 접해보셨을지라도 수업자료를 만드는 전체과정을 살펴보는 좋은 기회가 될 것입니다.



Geogebra를 실행시킵니다. 수업이나 지금과 같은 강의를 할 때는 시작할 때 실행 된 Geogebra의 초기 실행상태를 같게 할 필요가 있습니다. '선택사항'을 선택하시 고 '기본설정사항으로 되돌리기'를 선택합니다. Geogebra의 글자가 너무 작게 느껴 집니다. '선택사항'을 선택하고 '글자 크기'를 선택한 후 '24pt'를 선택합니다. 전체 적인 글자 크기를 24pt로 조절합니다. 글자 크기가 적당하게 느껴지더라도 같은 실 행화면을 위하여 24pt로 조절해 주시기 바랍니다.

자료를 만드는 과정에서 반드시 알아야 할 팁을 하나 알려드리겠습니다. [Ctrl]+[z] 단축키입니다. 어떤 작업을 했을 때 원하는 대로 자료가 만들어지지 않았다면 이 작업을 취소하고 바로 전 단계로 복원하는 기능입니다. 한글 작업 하실 때 많이 사 용하셨을 것입니다. 그럼 본격적으로 진행하겠습니다.



화살표 모양의 '이동' 도구를 선택합니다. 기하창에 'x'표시된 위치에 마우스를 위 치해 놓고 오른쪽 마우스를 클릭합니다. 세부 메뉴가 나타나면 '좌표축'을 선택합니 다. 기하창에 좌표축이 보이지 않게 합니다. 같은 방법으로 '격자'를 선택하여 격자 를 보이지 않게 합니다.



'이동' 도구의 역삼각형을 선택하면 관련된 도구들이 나타납니다. 이 중 필요한 도 구를 선택하면 대표 도구로 상단에 표시됩니다. 예각삼각형을 만들겠습니다. '다각 형'도구를 선택합니다. 기하창의 왼쪽 아래부터 차례로 예각삼각형의 꼭짓점이 기 하창에 위치할 곳을 선택합니다. 여기서 중요한 것은 삼각형이 완성되려면 삼각형 의 세 점만 선택하면 안 됩니다. 반드시 처음 선택한 꼭짓점을 마지막에 선택하여 야 삼각형이 완성됩니다. 삼각형의 6요소에 해당하는 변과 꼭짓점의 이름이 잘 부 여되어 삼각형이 기하창에 만들어졌습니다.



'이동' 도구를 선택합니다. 점 A에 마우스를 위치 시키고 오른쪽 마우스를 클릭하 고 '설정사항'을 선택합니다. '설정사항' 창에 '기본' 탭을 선택한 후 캡션에 Tex 명 령어인 \$₩mathrm{A}\$를 입력합니다. '이름 보이기'의 리스트 박스를 선택하여 캡 션을 선택하면 점 A가 로만체 점 A로 바뀌게 됩니다.



마찮가지로 점 B와 점 C의 캡션에 \$₩mathrm{B}\$와 \$₩mathrm{C}\$를 각각 입력 합니다. '이동' 도구가 선택된 상태에서 선분 a에서 오른쪽 마우스를 클릭합니다. 세부 메뉴에서 '이름 보이기'를 선택하여 선분 a의 이름을 보이지 않게 합니다. 마 찮가지로 선분 b와 선분 c의 이름을 보이지 않게 합니다.



'이동' 도구가 선택된 상태에서 대수창에 삼각형 설정사항의 '색상'탭에서 파란색을 선택합니다.



'스타일'탭에서 '선 굵기'를 9, '직선 불투명도'를 10으로 하고 설정사항 창을 닫습 니다. 기하창에 선 굵기 9인 파란색 예각삼각형이 만들어졌습니다.



'보기'에서 '기하창2'를 선택합니다. 기하창2가 기하창 옆에 나타났습니다. 기하창 과 기하창2의 사이에 마우스를 위치시키면 마우스 포인터가 좌우 화살표 모양이 됩 니다. 이데 왼쪽 마우스를 클릭한 상태에서 창의 크기를 조절하여 삼각형 ABC가 다 나타나도록 합니다. 현재 상단에 '슬라이더' 도구가 대표 도구로 되어 있습니다. 작은 역삼각형을 눌러 '체크상자'를 선택하여 '체크상자' 도구가 대표 도구가 되도 록 설정합니다.



'이동' 도구를 선택한 상태에서 기하창2의 x표시한 곳에 마우스를 위치시키고 오른 쪽 마우스를 클릭 힙니다. 맨 아래 '기하창 ...'을 선택합니다. 'x축' 탭을 선택하고 '눈금간격' 체크상자를 선택하고 리스트 박스에서 1을 선택합니다.



'y축' 탭을 선택하고 '눈금간격' 체크상자를 선택하고 리스트 박스에서 1을 선택합 니다. '격자' 탭을 선택하고 '격자 보이기' 체크상자를 선택하고 '격자 유형'의 리스 트 박스에서 '주 격자선'을 선택합니다. '설정사항' 창을 닫습니다.



'이동' 도구를 선택한 상태에서 기하창2의 x표시한 곳에 마우스를 위치시키고 오른 쪽 마우스를 클릭 힙니다. '좌표축'을 선택합니다. 기하창2에 격자만 나타난 상태입 니다. 'x'표시를 왼찍 마우스로 클릭 합니다. 이 상태에서 [Ctrl]키를 누른 상태로 있습니다. 마우스의 휠을 위 아래로 돌리면, 기하창2의 격자가 간격이 커졌다가 작 아지는 모습을 보실 수 있습니다. 상단의 '체크상자' 도구 그림의 체크상자의 크기 보다 간격을 약간 크게 조절합니다.



'체크상자' 도구를 선택한 상태에서 기하창2의 왼쪽 위에 왼쪽 마우스를 클릭하면 '대상을 보이거나 감추기 위한 체크상자'창이 나타납니다. 이 창을 왼쪽 마우스를 클릭한 상태에서 삼각형이 다 보이도록 옆으로 옮겨 놓습니다. 캡션에 1을 입력합 니다. 기하창의 삼각형에 점 A, 점 B, 점 C를 차례로 왼쪽 마우스를 클릭합니다. 그러면 '대상을 보이거나 감추기 위한 체크상자'의 창에 차례로 나타납니다. 반드시 다시 기하창2를 한 번 선택하고 '적용'을 누릅니다. 체크상자1이 기하창2에 나타납 니다. 체크상자1에 마우스를 위치시키고 오른쪽 마우스를 클릭한 상태에서 체크상 자1을 격자에 맞추어 위치시킬 수 있습니다. 이렇게 하면, 줄 맞추어 체크 상자들 을 위치시킬 수 있습니다.



만약, 기하창2를 누르지 않은 상태에서 '적용'을 누르면 체크상자1이 기하창2에 나

타나게 됩니다. 이럴 경우에는 기하창에 있는 체크상자1에 마우스를 위치시키고 오 른쪽 마우스를 클릭합니다. '설정사항...'을 선택합니다. '고급기능'탭에 들어가서 스 크롤 막대를 아래쪽으로 내린 후 '기하창'은 체크 해제하고 '기하창2'는 체크 합니 다. 기하창에 체크상자1이 사라지고 기하창2에 체크 상자가 나타남을 확인 할 수 있습니다. 설정사항 창을 닫습니다.



'체크상자' 도구를 선택한 상태에서 기하창2의 체크 상자1 아래를 왼쪽 마우스를 클릭하면 '대상을 보이거나 감추기 위한 체크상자'창이 나타납니다. 이 창을 왼쪽 마우스를 클릭한 상태에서 삼각형이 다 보이도록 옆으로 옮겨 놓습니다. 캡션에 2 를 입력합니다. 기하창의 삼각형의 선분 BC, 선분 CA, 선분 AB를 차례로 왼쪽 마 우스를 클릭합니다. 그러면 '대상을 보이거나 감추기 위한 체크상자'의 창에 차례로 나타납니다. 반드시 다시 기하창2를 한 번 선택하고 '적용'을 누릅니다. 체크상자2 가 기하창2에 나타납니다. 체크상자2에 마우스를 위치시키고 오른쪽 마우스를 클릭 한 상태에서 체크상자2를 격자에 맞추어 체크상자1 아래에 위치시킬 수 있습니다.



'체크상자' 도구를 선택한 상태에서 기하창2의 체크 상자2 아래를 왼쪽 마우스를 클릭하면 '대상을 보이거나 감추기 위한 체크상자'창이 나타납니다. 이 창을 왼쪽 마우스를 클릭한 상태에서 삼각형이 다 보이도록 옆으로 옮겨 놓습니다. 캡션에 3 을 입력합니다. 기하창의 삼각형의 내부에 마우스를 위치시키고 왼쪽 마우스 클릭 합니다. 그러면 '대상을 보이거나 감추기 위한 체크상자'의 다각형 A, B, C가 나 타납니다. 반드시 다시 기하창2를 한 번 선택하고 '적용'을 누릅니다. 체크상자3이 기하창2에 나타납니다. 체크상자3에 마우스를 위치시키고 오른쪽 마우스를 클릭한 상태에서 체크상자3를 격자에 맞추어 체크상자2 아래에 위치시킬 수 있습니다.

지금까지 체크상자를 총 3개 만들었습니다. '이동'도구를 선택한 상태에서 체크상자 를 체크 해제하시고 체크상자1, 체크상자2, 체크상자3을 차례로 체크 합니다. 마치 수업시간에 칠판에 하나씩 그려나가는 과정을 보여 줄 수 있습니다. 수학 수업자료 를 만들 때 반드시 과정이 다 나타나도록 하는 것이 중요합니다. 이런 방식의 수업 자료는 과정을 모두 표현할 수 있습니다. 즉, 세 점이 있고, 선분으로 연결한 삼각 형이 있고, 이 삼각형의 내부에 대하여 생각하자란 의미를 전달 할 수 있겠습니다.



'각' 도구를 선택합니다. 점 B, 점 A, 점 C를 차례로 왼쪽 마우스를 클릭한다. 그러 면 각 BAC가 기하창에 나타납니다. 앞에서 했던 방식으로 각 BAC를 파란색에 선 굵기는 8, 직선 불투명도는 100으로 하고 이름은 보이지 않게 합니다. 앞에서 했던 방식대로 '체크상자'도구를 사용하여 기하창2의 체크상자3 아래에 각 BAC에 대한 체크상자4를 만들어 놓습니다. 즉 체크상자4가 체크 되어 있을 때만, 각 BAC가 나타나도록 체크상자4를 설정해서 만들어 놓은 것입니다.

선분의 길이는 '세 점을 지나는 원호'도구를 이용하여 그냥 세 점을 선택하여 선분 의 길이를 나타낼 수 있지만, 점을 이동했을 때도 원하는 규격의 선분의 길이가 표 현되게 하려면 조금은 까다롭지만, 일일이 작도를 하여야 합니다. 이러한 반복적인 작업은 '도구'로써 만들어 놓는 것이 좋습니다.



'점'도구를 선택합니다. 삼각형을 옆으로 밀어놓고 기하창에 왼쪽 마우스를 클릭하 여 점 D와 점 E를 생성합니다. '중점 또는 중심'도구를 선택합니다. 점 D와 점 E을 차례로 선택하여 점 D와 점 E의 중점인 점 F를 생성합니다. 점 F와 점 E을 차례로 선택하여 점 F와 점 E의 중점인 점 G를 생성합니다. 점 F와 점 G을 차례로 선택하 여 점 F와 점 G의 중점인 점 H를 생성합니다. '점을 중심으로 회전'도구를 선택합 니다. 점 H와 점 F을 차례로 선택합니다. '점을 중심으로 회전' 창에서 각에 90°를 써 놓습니다. 만약 °를 지웠다면 입력 부분의 끝에 띠를 눌러 °를 찾아 선택하면 °가 입력됩니다. 확인을 선택합니다. 점 H를 점 F를 중심으로 반시계 방향으로 90°회전한 위치에 점 H'을 생성합니다.



'세 점을 지나는 원호'도구를 선택합니다. 점 D, 점 H', 점 E를 차례로 선택하면 이 세 점을 지나는 원호가 생성됩니다. '도구'를 선택한 후 '새 도구 만들기'를 선택합 니다. '새 도구 만들기'창에서 '출력 대상' 탭을 선택하고 기하창에 있는 원호를 선 택하면 선택된 원호가 창에 나타납니다.



'입력 대상' 탭을 선택하면 자동으로 점 D와 점 E가 나타나 있는 것을 볼 수 있습니다. 즉, 두 점을 선택하면 두 점을 잇는 점선의 원호를 만들어 낸다는 의미입니다. '이름과 아이콘' 탭을 선택하고 도구 이름에 '선분길이표시'라고 입력하고 '종 료'를 선택합니다. '선분길이표시'도구가 대표 도구로 생성되어 있음을 확인합니다. '선분길이표시'도구를 선택합니다. 점 A와 점 C를 차례로 선택하면 점 A와 점 C를 이어주는 점선의 원호가 생성됩니다. 점 B와 점 A를 차례로 선택하면 점 B와 점 A를 이어주는 점선의 원호가 생성됩니다. 원호 AB는 캡션에 \$c\$, 파란색, 불 투명도 100으로 설정하고 원호 CA는 캡션에 \$b\$, 파란색, 불투명도 100으로 설정 합니다.



'텍스트'도구를 선택합니다. 삼각형의 x자 위치에 마우스를 옮겨 놓고 왼쪽 마우스

를 클릭합니다. '텍스트'창이 나타납니다. 편집에 ₩mathrm{S} 라고 입력합니다. 'LaTex 수식'체크 상자를 체크합니다. '미리보기'에 S가 나타난다. 확인을 선택합 니다.



S의 설정사항에서 '텍스트' 탭에서 글자크기가 나타난 리스트 박스에서 '크게'를 선 택하고 확인을 선택합니다. S의 색상은 빨간색으로 합니다. 앞에서 한 것처럼 '체 크상자'도구를 활용하여 원호 b는 체크상자5, 원호 c는 체크상자6, 텍스트 S는 체크 상자7로 기하창2에 만들어 놓습니다.



'수직선'도구를 선택한 상태에서 점 C를 선택하고 선분 AB를 선택합니다. 기하창 에 점 C를 지나면서 선분 AB와 수직인 직선 이 만들어집니다. '교점'도구를 선택한

상태에서 이 선분 AB에 수직인 직선과 선분 AB를 차례로 선택하면 교점이 만들어 집니다.



선분 AB의 수직선에 마우스를 위치시켜 놓고 오른쪽 마우스를 클릭하고 '대상 보 이기'를 선택하여 선분 AB의 수직선이 나타나지 않게 한다. 만약, 화면에서 없앤다 고 이 수직선을 삭제하게 도면 수직선과 선분 AB의 교점도 같이 사라지게 됩니다. 점 C에서 선분AB에 수선의 발들 내려놓은 점 D의 설정사항에 들어가서 이름은 H 로, 캡션에 \$₩mathrm{H}\$을 입력합니다.



'선분'도구를 선택한 상태에서 점 C와 점 H를 차례로 선택한다. 기하창에 선분 CH 가 만들어진다. 이 선분들 색상을 녹색, 선굵기는 9, 직선 불투명서 100, 이름은 보 이지 않게 설정합니다. '각'도구를 선택한 상태에서 점 C, 점 H, 점 A를 차례로 선

택하면 직각이 나타난다. 참고로 각이 직각일 때 직각 표시로 자동으로 바뀐다. 이 직각을 녹색, 선굵기는 8, 직선 불투명도 100, 이름은 보이지 않게 설정한다. '체크 상자'도구를 활용하여 선분 CH와 직각 표시를 체크상자8을 만듭니다. 점 H는 체크 상자9로 만듭니다.



앞에서 만든'선분길이표시'도구를 선택한 상태에서 점 C와 점 H를 차례로 선택한다. 점 C와 점 H를 잇는 원호가 기하창에 만들어진다. 원호의 캡션은 \$?\$, 색깔은 녹색, 선 굵기는 9로 한다.'체크상자'도구를 활용하여 이 원호를 체크상자10으로 만든다.



'텍스트'도구가 선택된 상태에서 x표시에 마우스를 위치시켜놓고 왼쪽 마우스를

클릭한다. '텍스트'창에 '편집'에 ₩sin A = ₩frac{₩overline{₩mathrm{CH}}{b} 를 입력한다. 확인을 선택하면 기하창에 sin $A = \frac{\overline{CH}}{b}$ 가 나타난다. '체크상자'도구 를 활용하여 텍스트 sin $A = \frac{\overline{CH}}{b}$ 를 체크상자11로 만든다.



'체크상자'도구를 선택된 상태에서 기하창 체크상자11 아래를 마우스를 위치시키고 왼쪽 마우스를 클릭한다. 나타난 창의 캡션에 12를 입력하고 적용을 누른다. 기하 창2에 체크상자12가 만들어졌다. '이동'도구를 선택한 상태에서 마우스를 체크상자 10과 체크상자12에 올려놓으면 이 체크상자의 진릿값 문자를 알 수 있다. 여기서 는 체크상자10은 진릿값이 r이고 체크상자12는 진리값이 t인 상태라고 하고 진행을 계속하기로 한다. 혹시 다른 문자면 그에 맞에 아래 내용을 바꿔서 입력하면 된다.



?표가 있는 원호의 설정사항으로 들어가서 '고급 기능' 탭을 선택한다. 대상이 나타 나기 위한 조건에 r이라고 되어 있을 것입니다. 이 입력창 끝에 @를 눌러 ∧와 ¬ 을 선택하고 t를 입력하여 r∧¬t가 입력한다. 그러면 체크상자12가 체크되면 ?표 가 있는 원호가 사라지게 된다. 즉, 위 뜻은 체크상자10과 체크상자12 체크되면 진 릿값 r과 진릿값 t가 다 참이 되어 r∧¬t가 거짓이 되어 ?표가 있는 원호가 사라졌 다고 보면 된다.



앞에서 만든 '선분길이표시'도구를 선택한 상태에서 점 C와 점 H를 차례로 선택한다. 점 C와 점 H를 잇는 원호가 기하창에 만들어진다. 원호의 캡션은 \$b₩sin A\$, 색깔은 녹색, 선 굵기는 9로 한다. '체크상자'도구를 활용하여 이 원호를 체크상자13으로 만든다.



'텍스트'도구를 활용하여 =₩frac{1}{2} bc ₩sin A을 입력하여 $rac{1}{2}bc\sin A$ 가 텍스트로 나타나게 한다. 글자크기는 크게, 색상은 빨간색으로 한다. 또한 '체크상자'도구를 활용하여 텍스트 $rac{1}{2}bc\sin A$ 를 체크상자14로 만듭니다.

드디어 두 변의 길이와 끼인 각의 크기가 예각인 삼각형의 넓이 공식을 유도하는 수업자료를 만들었습니다. 자 지금까지 고생해서 만든 자료에 체크상자를 모두 해제하고 체크상자1번부터 체크상자14번까지 하나씩 체크해보시기 바랍니다. 마치 수업시간에 칠판에 판서하듯 각 단계가 나타나는 수업자료가 만들어졌을 것입니다. 아래의 프로그램 링크는 강의록을 집필당시 사용한 Geogebra 버전입니다. Geogebra가 너무 많이 변경되었다고 싶으면 아래에서 받으셔서 익히시기 바랍니다.

[GeoGebra 5.0.462.0-d (02 May 2018) 설치파일] Installer : <u>https://goo.gl/SsdFBd</u> (From Home Page) Portable : <u>https://goo.gl/FxJxES</u> (From Home Page) Installer : <u>https://goo.gl/dqtbfk</u> (From Google Drive)

Portable : <u>https://goo.gl/zwundc</u> (From Google Drive)