
마지막 변경일 2018년 5월 7일

** 이항분포와 정규분포의 관계 **

Geogebra와 수학의 시각화 책의 3.2소절 내용임.

<http://min7014.iptime.org/math/2017063002.htm>

가장 최근 파일은 링크를 누르면 받아 보실 수 있습니다.

<https://goo.gl/edxSm7>

<http://min7014.iptime.org/math/2018010602.pdf>

자료의 수정이 필요한 부분이 있으면 언제든지

민은기 E-mail : min7014@nate.com

이경수 E-mail : ksteach81@gmail.com

으로 연락주시면 감사하겠습니다.

강의록을 보기전에 프로그램 설치를 반드시 읽어보시고 꼭 지오지브라 클래식 5를 설치하시기 바랍니다.

<https://goo.gl/wqWJ6v>

<http://min7014.iptime.org/math/2018011001.pdf>

* 주요변경내역 *

2017.06.24 Geogebra와 수학의 시각화 책에 엮어 출간.

차례

차례	i
제 1 장 Geogebra를 활용한 통계	1
1.1 이항분포와 정규분포의 관계	3
1.1.1 이항분포의 그래프 그리기	3
1.1.2 이항분포 그래프를 동적으로 표현하기	4
1.1.3 스프레드시트를 이용하여 표 구성하기	6
1.1.4 정규분포 그래프 그리기	7
1.1.5 텍스트를 활용하여 내용 구성하기	8
찾아보기	17

제 1 장

Geogebra를 활용한 통계

1.1 이항분포와 정규분포의 관계

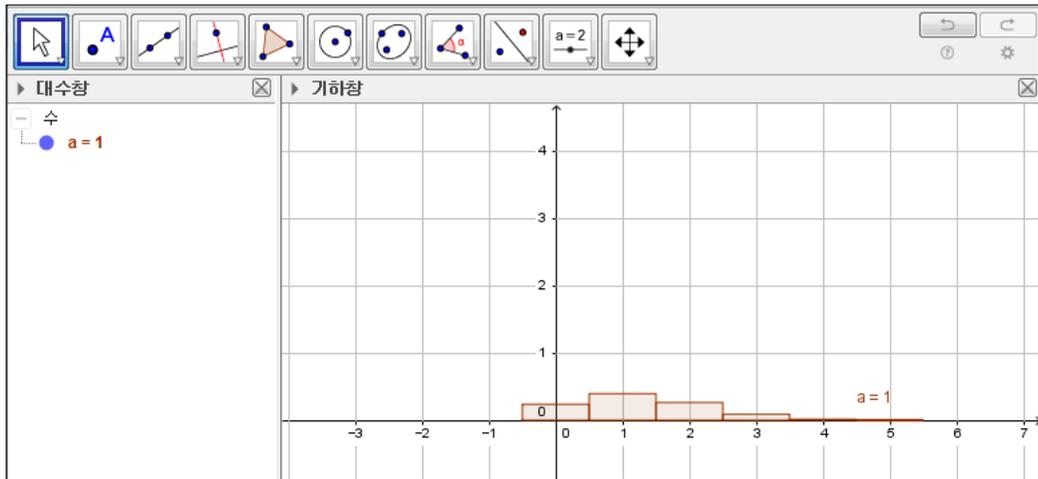
확률변수 X 가 이항분포를 따를 때, 시행횟수가 크면 클수록 이항분포의 모양은 정규분포의 모양에 가까워지게 됩니다. 이번 장에서는 이항분포가 정규분포를 닮아가는 과정을 관찰해 볼 수 있는 자료를 만들어 볼 것입니다. 동적으로 움직이는 자료이기 때문에 단순히 교과서의 정지한 그림을 보고 깨닫는 것보다는 개념을 정확하게 인지하는데 더 많은 도움이 될 것이라 생각합니다.

1.1.1 이항분포의 그래프 그리기

이항분포는 한 번의 시행에서 어떤 사건의 성공확률과 시행횟수로 결정됩니다. 입력창에 다음과 같이 입력하여 시행횟수가 5회, 성공확률이 0.25인 이항분포의 그래프를 그려 봅니다.

이항분포[5,0.25]

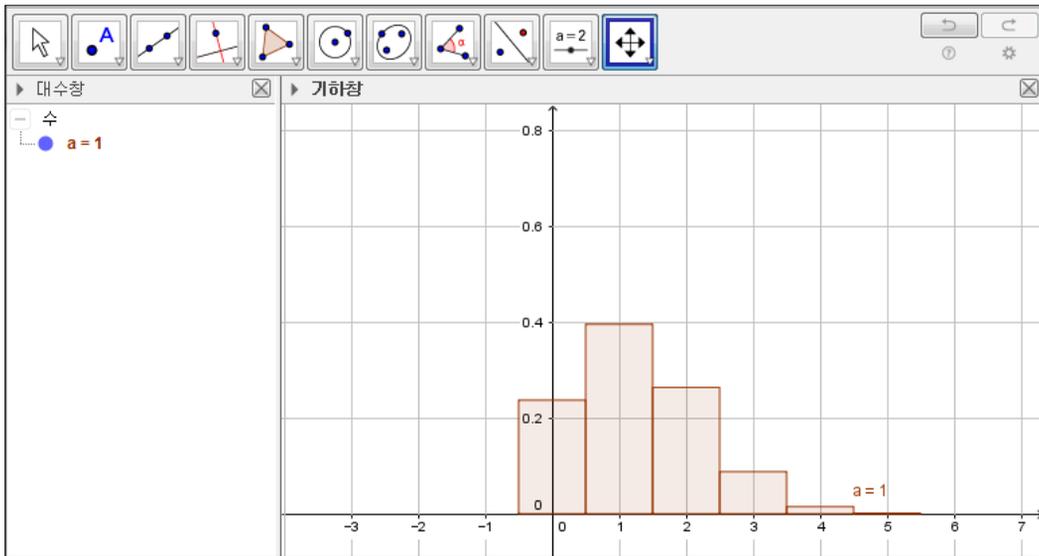
※ 이항분포[<시행횟수>,<성공확률>]



위의 그림과 같이 6개의 막대가 만들어지게 됩니다. 여기서 x 축의 0에 위치한

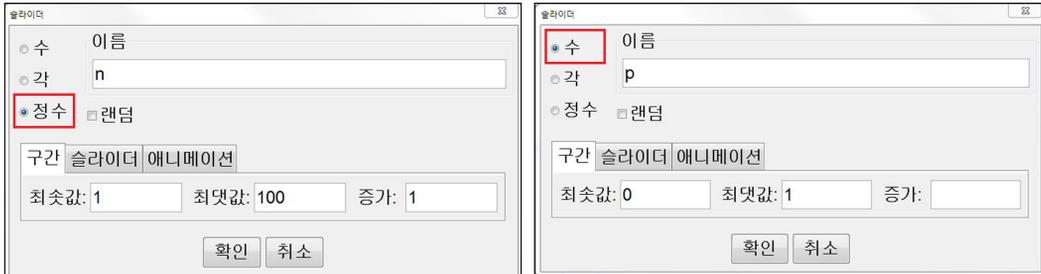
제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 통계

막대는 5번의 시행에서 0번 성공할 확률을 나타내고, 1에 위치한 막대는 5번의 시행에서 1번 성공할 확률을 나타냅니다. 그런데 그래프를 그리고 보니 막대의 높이가 낮아 각 확률을 서로 비교하기가 어렵다는 것을 알 수 있습니다. y 축은 확률을 나타내는 축으로 1보다 큰 값은 의미가 없기 때문에 아래 그림에서와 같이 y 축을 확대해 주도록 하겠습니다. 축의 확대는 도구모음에서 기하창 이동을 선택하고, 마우스의 축을 잡아 직접 늘려주는 방법이 있습니다.



1.1.2 이항분포 그래프를 동적으로 표현하기

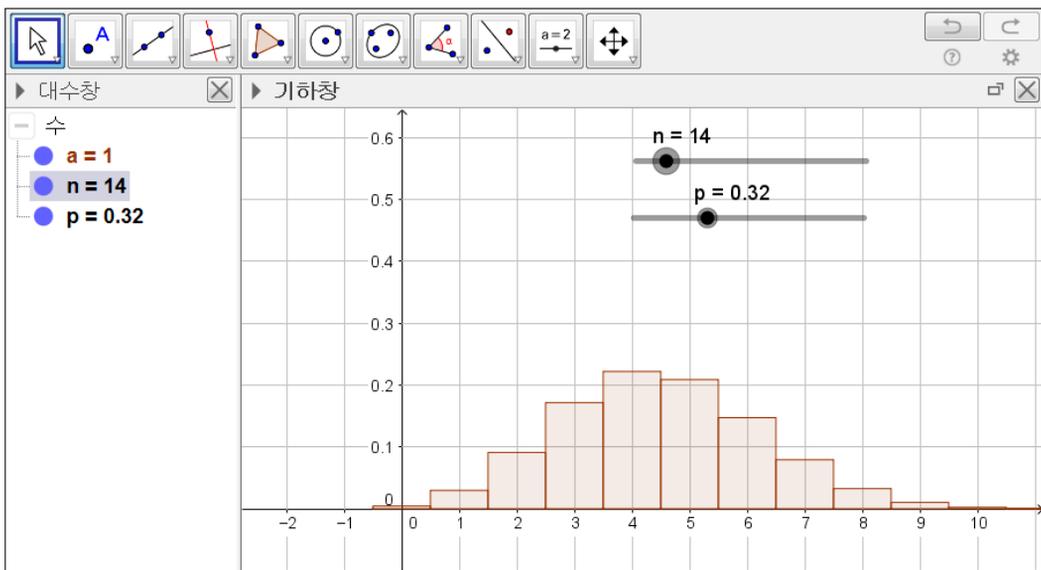
우리는 이 자료를 통해 시행횟수가 커짐에 따라 이항분포의 그래프가 정규분포의 그래프에 가까워지는 과정을 보려 하는 것입니다. 따라서 지금부터는 그래프가 시행횟수의 변화에 즉각적으로 반응할 수 있도록 자료를 구성해 보도록 하겠습니다. 도구모음에서 ‘슬라이더’ 도구를 선택하고 이어서 기하창을 클릭하면 슬라이더 설정창이 나옵니다. 그림과 같이 [1,100] 범위의 정수형 변수 n 과 [0,1] 범위의 실수형 변수 p 를 정의합니다.



기하창에 n 과 p 의 슬라이더가 생성된 것을 볼 수 있습니다. 이제 이 슬라이더와 이항분포의 그래프를 연결하겠습니다. 대수창에서 수항목에 정의되어 있는 이항분포 'a=1'을 더블 클릭하여 재정의 창으로 들어갑니다. 그리고 명령을 다음과 같이 수정합니다.

이항분포[n,p]

현재 설정되어 있는 n 과 p 의 값에 따른 이항분포로 모양이 바뀐 것을 확인할 수 있습니다. 이제 슬라이더의 점을 잡고 움직여보면 그래프가 함께 움직여지는 것을 볼 수 있습니다.

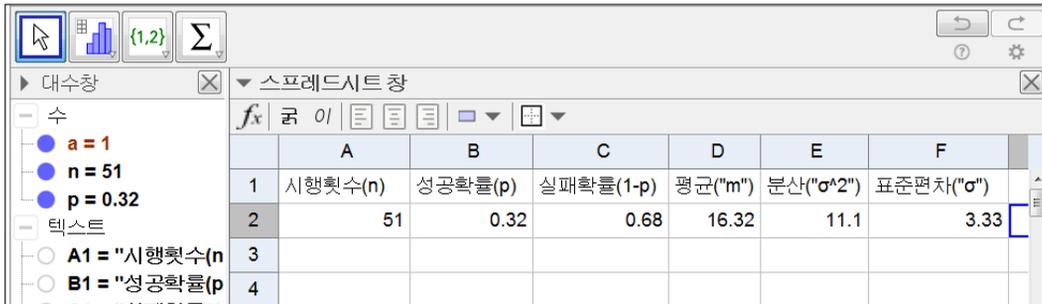


제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 통계

이제 이항분포의 설정사항으로 들어가 막대의 색상과 불투명도를 적당한 형태로 설정해 줍니다.

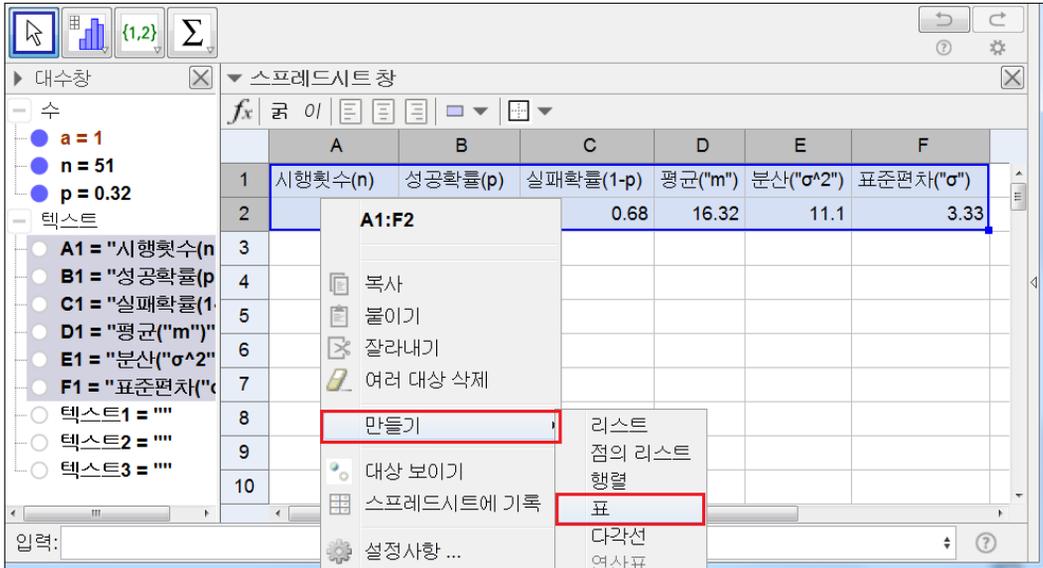
1.1.3 스프레드시트를 이용하여 표 구성하기

지금부터는 기하창에 이항분포의 시행횟수와 성공확률, 평균과 표준편차 등을 나타내는 표를 나타내 보도록 하겠습니다. 우선 상단 메뉴 중 보기에서 스프레드시트를 선택하여 창을 열어 줍니다. 참고로 스프레드시트 창을 여는 단축키는 [Ctrl]+[Shift]+[S] 입니다. 스프레드시트 창의 1행에 항목들의 이름을 아래와 같이 입력합니다. 그리고 2행에는 1행의 계산식을 입력합니다. 시행횟수(=n), 성공확률(=p), 실패확률(=1-p), 평균(=n*p), 분산(=n*p*(1-p)), 표준편차(=sqrt(n*p*(1-p)))



	A	B	C	D	E	F
1	시행횟수(n)	성공확률(p)	실패확률(1-p)	평균("m")	분산("σ ² ")	표준편차("σ")
2	51	0.32	0.68	16.32	11.1	3.33
3						
4						

위와 같이 입력하면 Excel 과 동일하게 계산식을 처리하여 그 결과를 보여 줍니다. 이때, 시그마 기호는 입력창을 클릭했을 때, 오른쪽에 나타나는 알파(α)를 클릭하면 찾을 수 있습니다. 이를 복사하여 사용하면 됩니다. 그리고 글자가 셀의 너비보다 길어서 안 보이게 될 때는 마우스로 셀의 경계를 잡아 셀 너비를 늘려주면 됩니다. 참고로 Geogebra 스프레드시트가 Excel과 다른 점은 셀에 수뿐만 아니라 행렬이나 좌표, 리스트 등과 같은 대상도 입력 가능하며 그것을 처리할 수 있다는 점입니다.



위 그림과 같이 스프레드시트에 입력한 두 행을 드래그한 후 오른쪽 마우스를 클릭합니다. 항목 중 만들기에서 표를 선택합니다. 그러면 기하창에 이 표가 나타남을 확인할 수 있습니다. 그리고 n과 p의 슬라이더를 움직이면 그래프와 표의 값이 함께 변하는 것도 볼 수 있습니다.

1.1.4 정규분포 그래프 그리기

이항분포와 정규분포 그래프를 비교하기 위해 이항분포 그래프 위에 이항분포의 평균과 표준편차를 인수로 하는 정규분포 그래프를 그려 보겠습니다. 입력창에 아래와 같이 입력합니다.

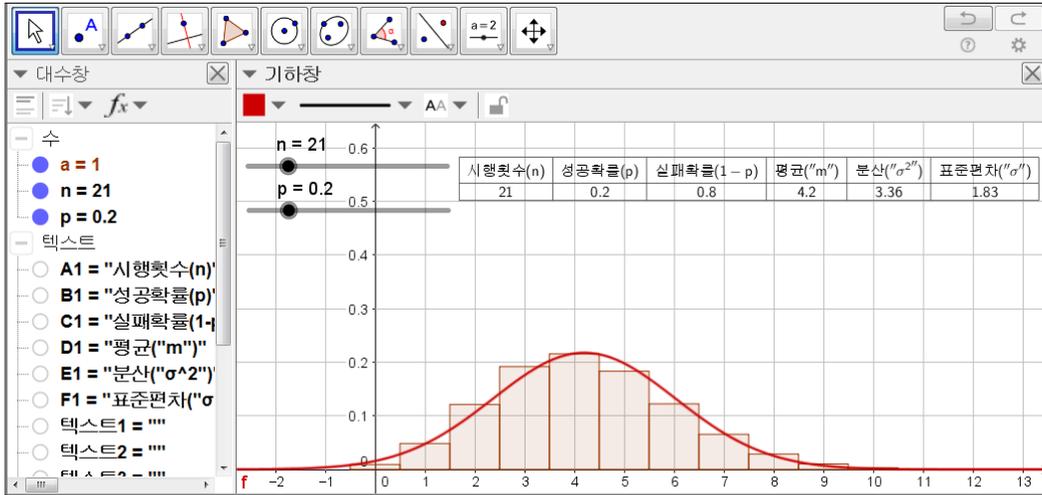
정규분포[D2,F2,x]

※ 정규분포[<평균>,<표준편차>,x]

확률변수 X가 정규분포를 따른다고 할 때, 그것을 기호로 $X \sim N(m, \sigma^2)$ 와 같이 나타냅니다. 그러나 정규분포의 그래프를 그리는 명령어에서는 분산이

제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 통계

아닌 표준편차를 넣어주어야 합니다. 이것은 일반적인 표현과 다른 부분이라 자칫 실수할 수 있기 때문에 주의가 필요합니다.

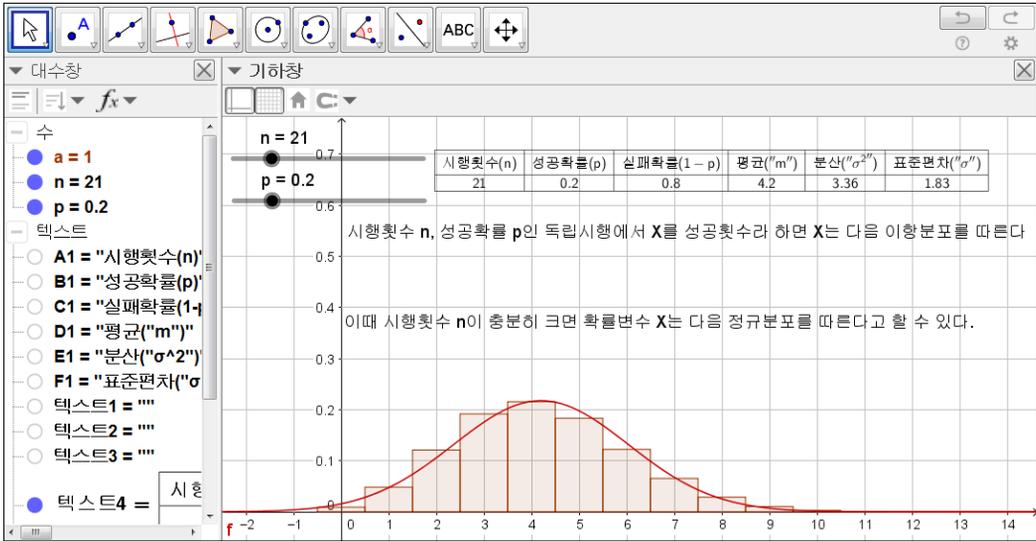


1.1.5 텍스트를 활용하여 내용 구성하기

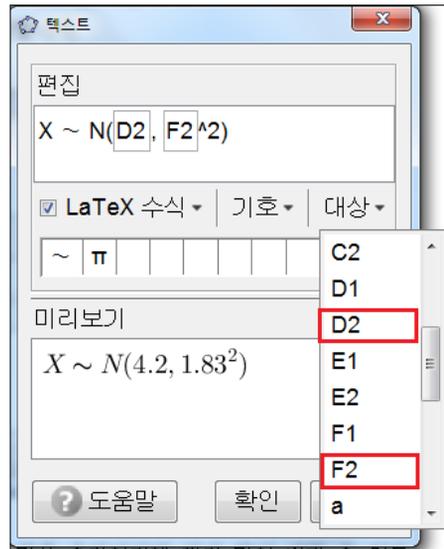
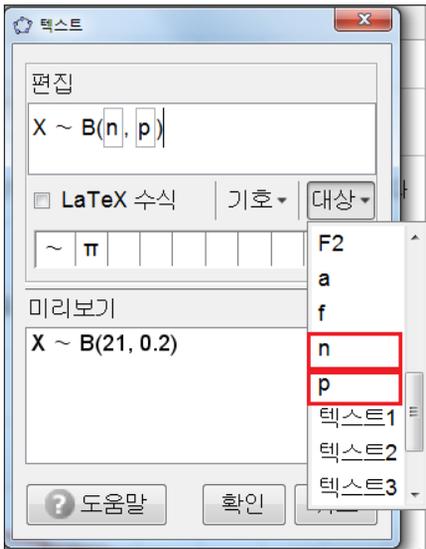
마지막으로 이 자료가 설명하고자 하는 내용을 글로 보여주는 부분을 만들어 보도록 하겠습니다. ‘텍스트’ 도구를 이용하여 기하창에 아래 문장을 입력합니다.

시행횟수 n , 성공확률 p 인 독립시행에서 X 를 성공횟수라 하면 X 는 다음 이항분포를 따른다.

이때 시행횟수 n 이 충분히 크면 확률변수 X 는 다음 정규분포를 따른다고 할 수 있다.



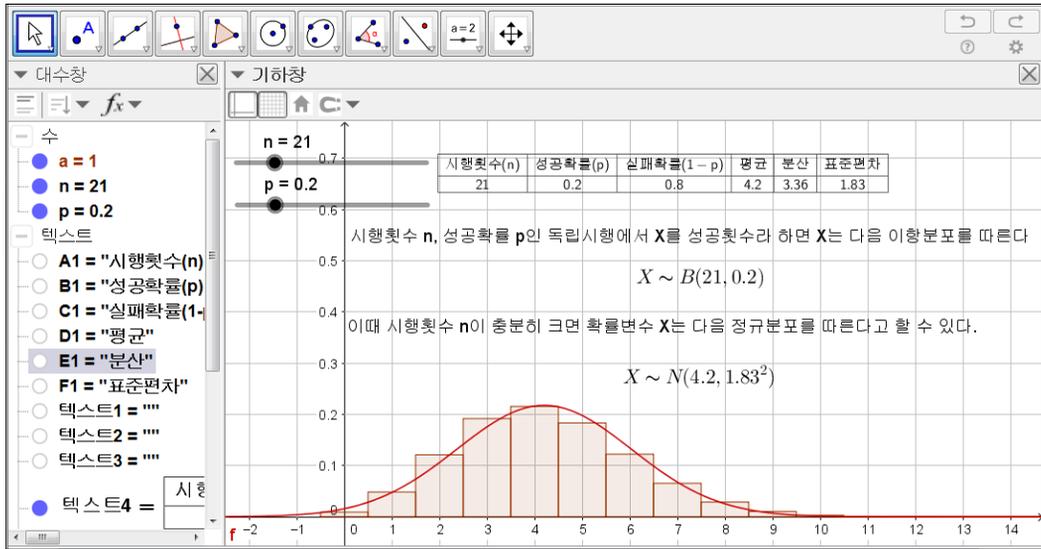
이제 위에서 작성한 각각의 내용을 통계 기호를 사용하여 나타내 보겠습니다.
 ‘텍스트’ 도구를 이용하여 다음과 같이 작성합니다.



위의 왼쪽 그림과 같이 n(시행횟수), p(성공확률)를 키보드에서 문자로 입력해 주는 대신 설정창의 대상에서 변수를 찾아 입력해주게 되면 기하창에 표시되

제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 통계

는 문자열에서도 n 과 p 의 값이 구체적인 값으로 나타날 뿐만 아니라 동적인 상황에서 변화하는 변수의 값을 그대로 보여지게 됩니다. 위의 오른쪽 그림과 같이 평균과 분산의 값도 슬라이더의 값에 따라 변하는 값으로 보여 지도록 대 상에서 찾아 설정해 줍니다. 참고로 ‘~’표시는 설정창의 기호에서 찾아서 입력 하도록 합니다.



다음으로 $[0, k]$ (k 는 정수) 범위에서 이항분포와 정규분포의 확률을 서로 비교 해 볼 수 있는 내용을 작성해 보도록 하겠습니다. 먼저 k 라는 이름의 슬라이더를 $[0, n]$ 범위의 정수로 만들어 줍니다. 최댓값을 n 으로 하는 이유는 k 가 총 시행횟수 n 을 넘을 수 없기 때문입니다. 슬라이더를 만들어 확인해 보면 k 의 최댓값은 n 의 값에 따라서 달라집니다. 먼저 이항분포에서 0회 이상 k 회 이하 성공할 확률을 구하기 위해 성공 횟수에 대한 확률을 구하는 방법을 알아보도록 하겠습니다. 입력창에 다음 내용을 입력합니다.

$$\text{조합}[n, 3] * p^{**3} * (1 - p)^{**}(n - 3)$$

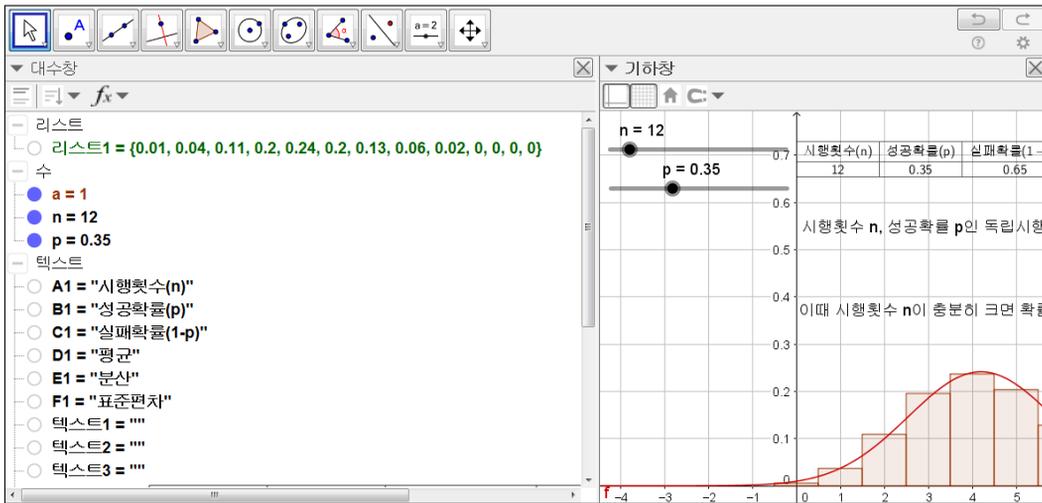
※ 조합[<수>, <수>]: 서로 다른 n 개 중 r 개를 택하는 조합의 수

이는 n 회의 독립시행에서 3회 성공할 확률을 구하는 식 ${}_n C_r p^3 (1 - p)^{n-3}$ 이며, 이항분포의 그래프에서 왼쪽 4번째 막대의 높이입니다. 우리는 모든 막대의 높이를 알아야 합니다. 그러나 이것을 제각각 계산하는 것은 매우 번거로운 작업이므로 다음과 처리해 보도록 하겠습니다. 대수창에서 앞서 구한 3회 성공의 확률을 삭제합니다. 그리고 입력창에 다음과 같이 입력합니다.

```
수열[조합[n, t]*p**t *(1 - p)**(n - t), t, 0, n]
```

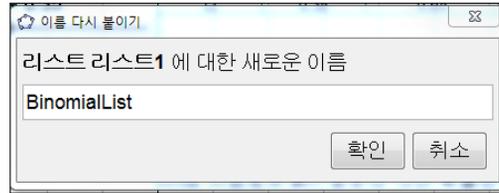
※ 수열[<표현식>,<변수>,<시작값>,<끝값>] : 표현식의 해당 변수에 시작값부터 끝값까지 대입하여 리스트를 구성

‘수열’이란 명령어는 표현식에서 지정한 변수의 값을 시작값에서 끝값까지 대입하고, 그 값들을 리스트로 묶어주는 역할을 합니다.



가독성을 높이기 위해 리스트의 이름은 BinomialList로 수정합니다. 이름 수정은 마우스의 오른쪽 버튼을 클릭하면 나오는 항목 중 이름 다시 붙이기를 선택해 주면 됩니다. 그러면 아래와 같은 창에서 이름을 수정할 수 있습니다.

제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 통계



이제, 이항분포에서 성공횟수가 0회 이상 k회 이하일 확률을 구해 보겠습니다. 입력창에 다음 내용을 입력합니다.

합[BinomialList,k+1]

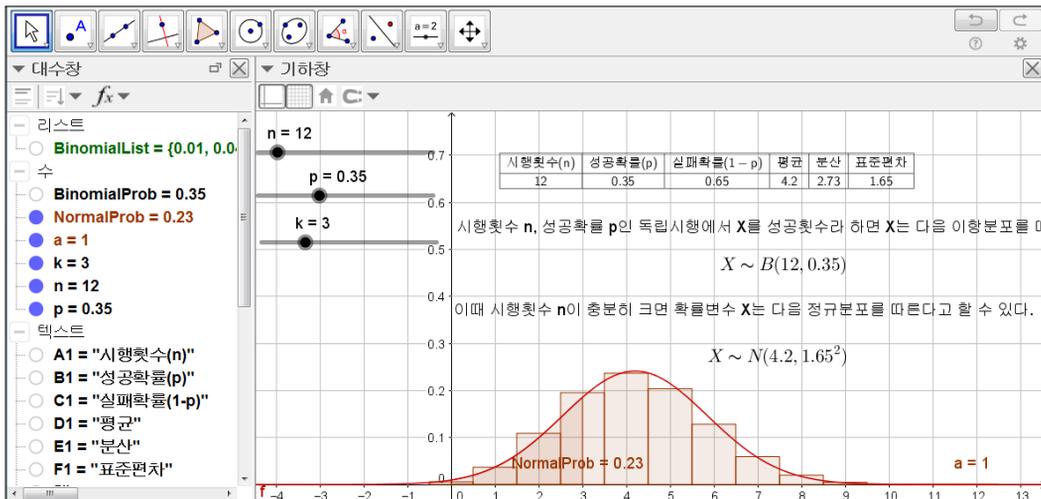
※ 합[<리스트>, <원소의수>]

두 번째 인자가 k+1인 이유는 k회 성공할 확률이 왼쪽 k+1번째 직사각형에 대응되기 때문입니다. 위의 명령에 의해 정의된 수의 이름을 BinomialProb로 정의 하겠습니다. 이제 정규분포에서 확률변수가 0 이상 k 이하일 확률을 구해보도록 하겠습니다. 입력창에 다음 내용을 입력합니다.

적분[f,0,k]

※ 적분[<함수>, <처음값>, <마지막값>]

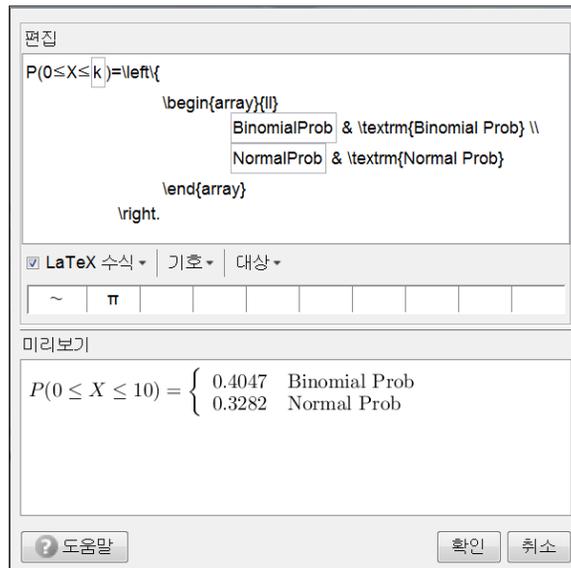
위의 명령에 의해 정의된 수의 이름을 NomalProb로 정의하겠습니다.



마지막으로 $[0, k]$ 범위에서 두 분포의 확률을 기하창에 나타내 보도록 하겠습니다. ‘텍스트’ 도구를 이용하여 편집창에 다음 내용을 입력합니다.

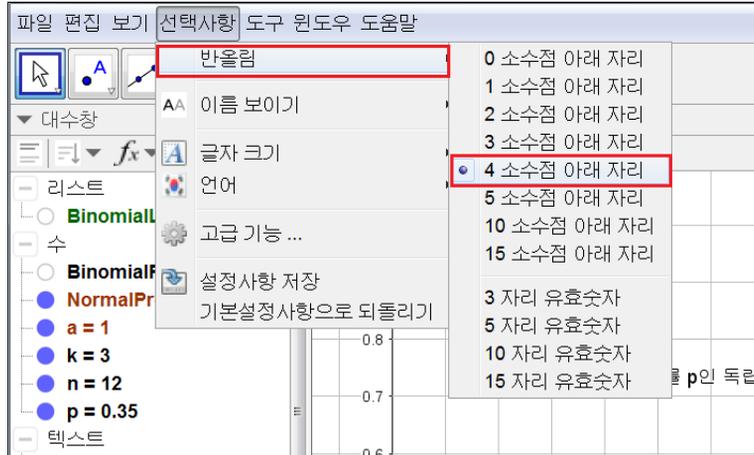
```
P(0 ≤ X ≤ k) = \left \{
    \begin{array}{ll}
    BinomialProb & \& \text{trm}\{Binomial Prob\} \\
    NormalProb & \& \text{trm}\{Normal Prob\} \\
    \end{array}
\right.
```

여기서 k , BinomialProb, NormalProb는 편집창 아래 대상을 클릭하여 선택해야 합니다. 내용을 모두 입력한 후 LaTeX 체크 박스에 체크를 해 주면 아래 그림과 같이 두 개의 수를 하나의 중괄호로 묶어 표현한 기호가 그려지게 됩니다.

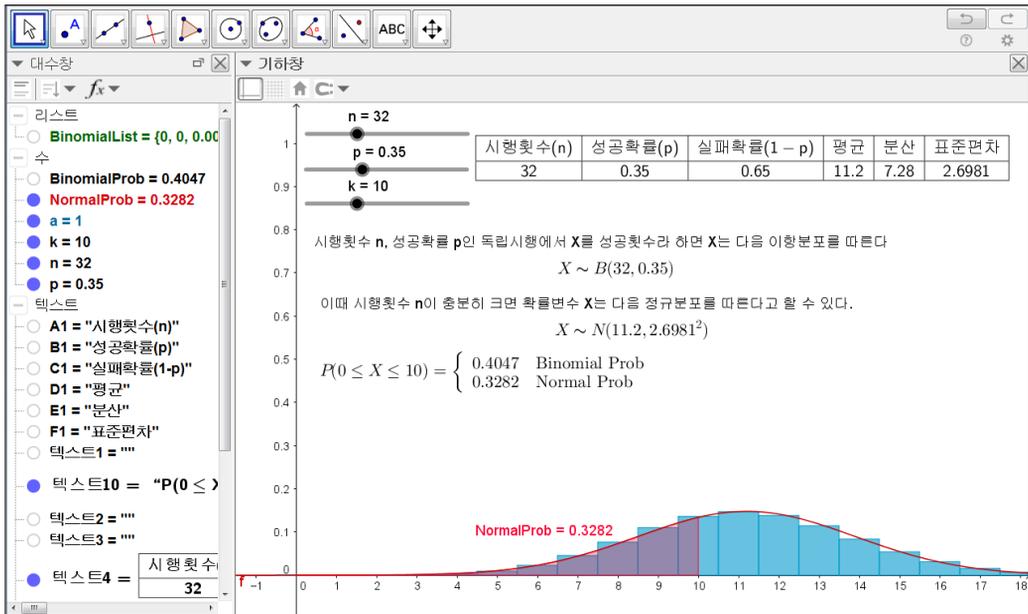


제 1 장 GEOGEBRA를 활용한 통계

두 값의 차이를 더 정확하게 비교하려면 아래 그림과 같이 선택사항 메뉴에서 반올림 자리수를 조정해 주면 됩니다.



마지막으로 그래프의 색상과 스타일을 보기 좋게 설정하면 다음과 같이 이항 분포와 정규분포의 관계를 관찰할 수 있는 자료가 완성됩니다.



지금까지 이항분포와 정규분포의 관계에 대한 자료를 만들어 보았습니다. 이 자료에서 시행횟수를 늘려가며 두 분포의 확률을 비교해 보면, 시행횟수가 많아질수록 두 분포의 차이가 작아짐을 확인할 수 있습니다.

찾아보기

수열, 11
이항분포, 3
이항분포와 정규분포의 관계, 3
적분, 12
정규분포, 7
조합, 10
합, 12

그동안 했던 강의 자료 중 일부를 책으로 엮음.

<http://min7014.iptime.org/math/2017063002.htm>



수학교사와 학생을 위한
Geogebra와 수학의 시각화

한국교원대학교 융합교육연구소 추천 도서

수 학교 사 와 학 생 을 위 한

Geogebra 와 수학의 시각화

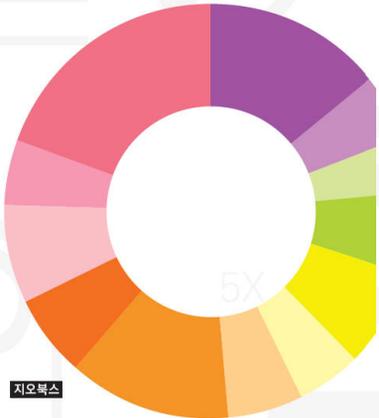
저자 민은기 | 이경수

저자 민은기

강원대학교 사범대학 수학교육과를 졸업하고 POSTECH 수학과에서 석사학위를 받았습니다. 경선중학교, 문막중학교, 강원과학고등학교, 세종과학예술경영학교에서 근무하였고 현재는 김해 삼정중학교에서 학생들을 지도하고 있습니다. 중학교, 과학고, 영재학교에서 학생들을 지도한 경험을 바탕으로 일급교사자격연수 및 영재인 등에서 수학자료 만들기에 대한 강의를 해왔습니다.

- 2017년 경남과학고등학교 수학과 현장연구 특강
- 2017년 세종청의과학캠프(수학)특강
- 2016년 강원도 중등 수학과 좋은 수업 만들기 직무연수 출강
- 2013년~2016년 강원도 중등수학자! 급진교사 자격연수 출강
- 2014년~2015년 YSC 강원도청소년과학캠프 창의력 문제 출제 및 심사

Geogebra를
활용한 수업자료 제작과
수학문제 탐구활동



저자 이경수

강원대학교 사범대학 수학교육과를 졸업한 후 학교현장에서 즐거운 수학교육을 만들고자 노력하고 있습니다. 프로그래밍에 흥미가 있어 Geogebra, SageMath 등의 소프트웨어로 수업자료를 만드는 활동을 즐겨하고 있으며 이를 수업에 효율적으로 적용할 수 있는 방법을 고민하고 있습니다. 특히, 통계관련 시뮬레이션 자료를 제작하는 활동에 관심이 많습니다.

- 2017년 현재 원주여자고등학교 재직 중
- 2015년~2017년 단원학교 맞춤형 직무연수 출강
- 2016년 교육부 중등교육연수원 [융합과 미래] 콘텐츠 개발
- 2016년 강원도 중등 수학과 좋은 수업 만들기 직무연수 출강
- 2013년~2016년 강원도 중등수학자! 급진교사 자격연수 출강
- 2015년~2016년 YSC 강원도청소년과학캠프 창의력 문제 출제 및 심사

지오투스



지오투스

지오투스

T 02-2263-6414 F 02-2268-9481
www.emotionbooks.co.kr





<https://ggbm.at/gsARCQs5>

책자료실(지오지브라 튜브)

[참고]

[민은기 선생님의 수학자료실]

Homepage : <http://min7014.iptime.org>

Facebook Page : <https://www.facebook.com/mineungimath>

YouTube Channel : <https://goo.gl/JpzU5i>

[이경수 선생님 블로그]

<http://blog.naver.com/evening07>

[GeoGebra 5.0.363.0-3D (03 June 2017) 설치파일]

Installer : <https://goo.gl/YvjsCV> (From Home Page)

Installer : <https://goo.gl/n69yE1> (From Google Drive)

[GeoGebra 5.0.462.0-d (02 May 2018) 설치파일]

Installer : <https://goo.gl/SsdFBd> (From Home Page)

Portable : <https://goo.gl/FxJxES>(From Home Page)

Installer : <https://goo.gl/dqtbfk> (From Google Drive)

Portable : <https://goo.gl/zwundc>(From Google Drive)