

# 수학적 사고의 시각화와 산출물 제작에 대하여

세종과학예술영재학교  
민 은 기

수학을 기반으로 하는 과제연구를 수행하려고 할 때 막막함이 느껴집니다. 과연 어떤 주제를 가지고 과제연구를 진행해야 할지 고민하게 됩니다. 또한, 꼭 수학이 과제연구의 주가 아니더라도 과제연구에 수학적 내용이 들어갈 때 이를 표현하는 것을 어떻게 할지 고민하게 됩니다. 사실 주제를 정하는 것은 저도 어렵지만, 주제를 찾는 한 가지 방법으로 수학적 사고를 시각화하는 방법을 통하여, 수학을 기반으로 하는 과제연구 주제와 수학적 내용의 표현 및 산출물 제작에 대하여, 간단히 이야기 하고자 합니다. 두 가지 실제 예를 통하여 선생님들께서 과제 탐구 및 수학적 표현에 대하여 말씀드리겠습니다.

## 1. 과제연구 주제 찾기 (모든 포물선은 닮음이다.)

강원과학고등학교에서 이차곡선을 가르치는 시간이었습니다. 한 학생이 저에게 모든 포물선이 닮음이라고 이야기를 해주었습니다. 처음에는 믿을 수가 없었습니다. 포물선의 폭이 좁고 넓은 것이 있는데 닮음이라니 어떻게 그럴 수 있지? 어쨌든, 수학문제 하나가 던져졌으니 문제를 고민했습니다. 그리고 아래와 같이 대수적 방법으로 해결 했습니다.

$T: (x, y) \rightarrow (ax, ay)$  원점에서  $a$  배 만큼 확대시키는 닮음 변환이다. 이 변환을 활용하여, 좌표평면상의 도형  $y^2 = 4px (p \neq 0)$ 과  $y^2 = 4qx (q \neq 0)$ 이 닮음임을 보이시오.

<증명>

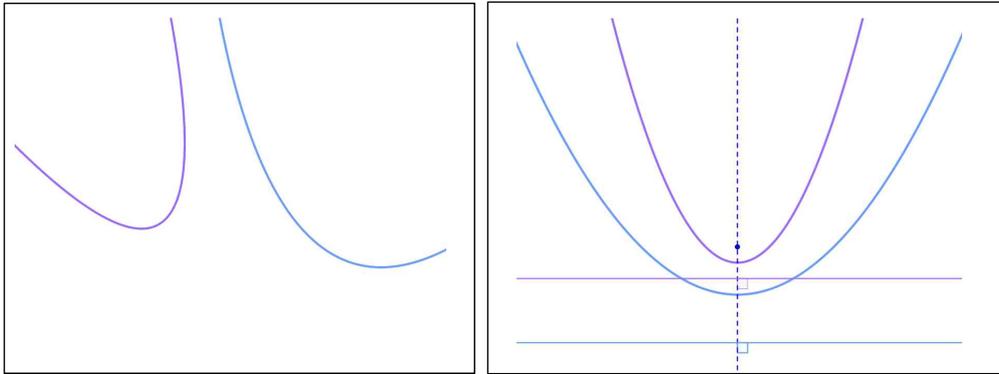
$y^2 = 4px$  를  $a$  배 확대한 식은  $\left(\frac{y}{a}\right)^2 = 4p \left(\frac{x}{a}\right)$  이다.

$y^2 = 4apx$  이므로

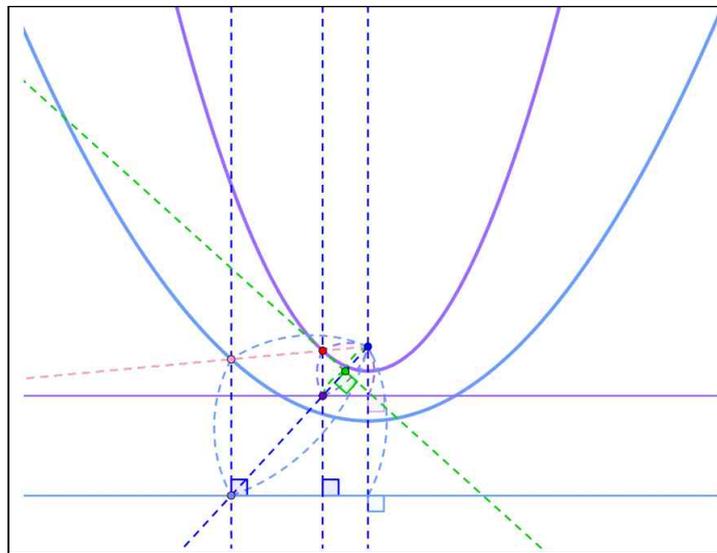
$$ap = q \quad a = \frac{q}{p}$$

$\therefore y^2 = 4px$ 를  $\frac{q}{p}$  배 확대시키면  $y^2 = 4qx$ 가 된다.

대수적으로 증명하고 나니 한 가지 아쉬운 마음이 들었습니다. 이것은 기하문제인데 기하적으로 생각하여 문제를 해결 할 수 있지 않을까? 하는 의문이 마음속에 있었습니다. 그래서 다음과 같이 임의의 포물선을 축과 초점을 일치시켜 표준화시켰습니다.



그리고 중학교에 나오는 삼각형의 닮음과 닮음의 중심개념을 가지고 ‘모든 포물선은 닮음이 다.’ 라는 사실을 증명했습니다.

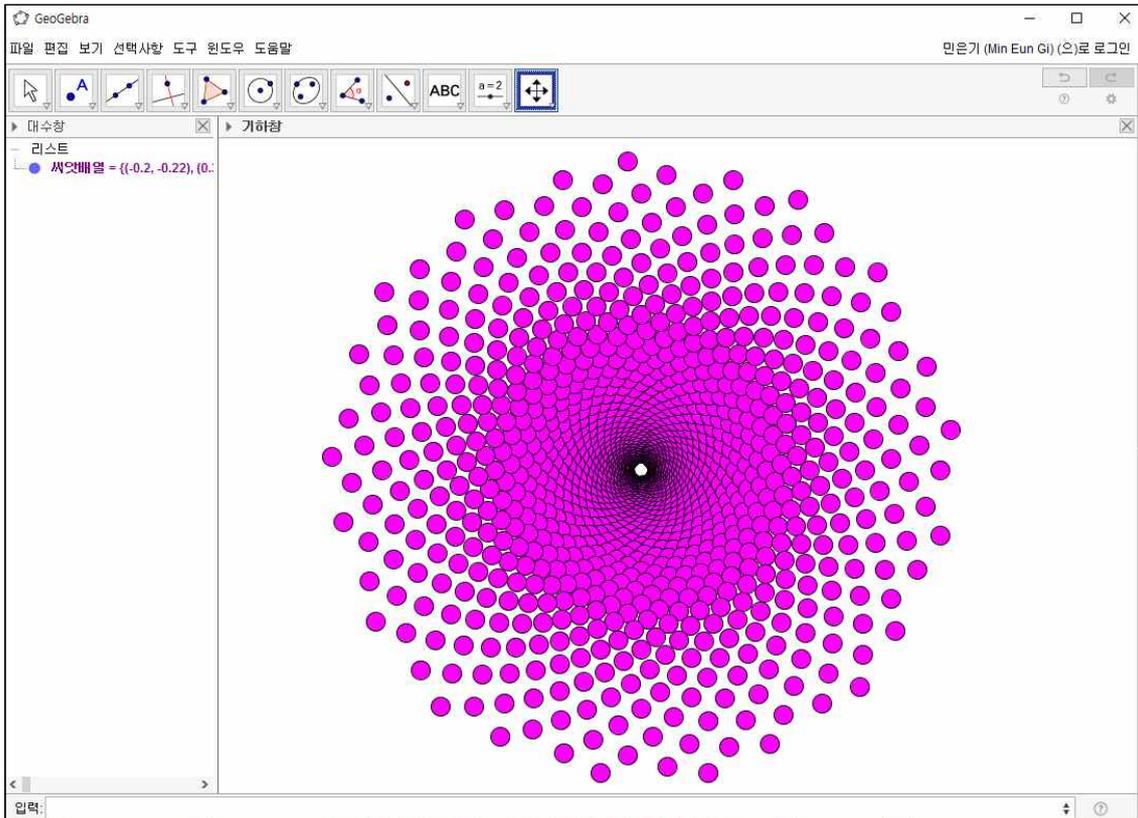


위의 예는 단순히 수학문제의 풀이로 볼 수 있겠지만, 수학문제 풀이를 다른 식으로 해 봄으로써 많은 것을 얻으실 수 있습니다. 특히, 좌표와 식이 도입되면서 기하문제들이 대수적으로 증명이 되고 있습니다. 기하적인 사고보다는 대수적인 문제 풀이 위주로 되어 있지요. 아마도 기하적인 문제는 직접 위의 예처럼 닮음, 합동의 개념으로 문제풀이를 하는 것입니다. 이런식으로 평소에 생각을 많이 하시면, 수학에 관한 연구 주제도 많이 찾을 수 있게 될 것이라 생각합니다.

## 2. 과제연구 주제 찾기 (해바라기 씨앗배열)

우연히, 학교 저녁식사시간에 이재구 선생님과 자리를 함께하게 되었습니다. 이재구 선생님은 세종과학예술영재학교에서 생물을 가르치십니다. 선생님과 해바라기 씨앗 배열에 대하여 이야기 하게 되었습니다. 여기에는 수학적 내용이 있다는 것이 많이 알려져 있지요. 이것을 직접 만들어 볼 수 있겠는가 하는 것이었습니다. 생물 선생님께서도 이것이 꽤 힘들 것이라

고 생각하셨나 봅니다. 전 수학적인 내용만 알려주면 직접 그려볼 수 있다고 했지요. 저녁식사를 마치고 한 10분정도의 제작과정을 통하여 수학프로그램(Geogebra)을 활용하여 아래와 같은 씨앗 배열을 만들어 보았습니다.



이날 이후 이재구 선생님께서는 생물과이시만 세종과학예술영재학교의 수학과 세미나에 매 시간 참석하셨습니다. 그리고 이 해바라기 씨앗배열에 관한 주제를 수학과 선생님들께 한동안 세미나 주제로 알려 드렸습니다. 참고로 세종과학예술영재학교에서는 수학과 선생님들의 실력향상을 위하여 매주 1시간식의 수학과 세미나를 하고 있습니다. 2016년 1학기에는 Geogebra, 2학기에는 Excel VBA를 진행하고 있습니다.

이 시간은 수학프로그램 연수 시간이 아니어서 간단히 그려 볼 수 있는 코드를 아래와 같이 알려 드리는 것으로 끝내겠습니다. 아래코드를 차례로 입력창에 입력하시면 해바라기 씨앗배열 그림이 그려집니다.

```
해바라기씨앗배열=수열[확대[회전[(0, 0.3), (137.5t)°, (0, 0)], 1.002^t, (0, 0)], t, 1, 1500]
```

여기에 다음 코드를 입력해서 조금 꾸며주면, 위와 같은 그림이 그려집니다.

```
축보이기[false]
```

색상설정[해바라기씨앗배열,255,0,255]

점크기설정[해바라기씨앗배열,9]

이러한 예처럼 수학프로그램을 활용하여 규칙을 가지고 있는 대상을 그림으로 그려내실 수 있으며, 또한 위의 코드를 이해한 후 각각의 숫자를 변경함으로써 대상에 대한 관찰을 하실 수 있을 것입니다.

즉, 단순히 그림으로 그린 것으로 끝나지 않고 각각의 숫자를 조절함으로써 다르게 표현되는 이유 등에 대하여 많은 생각을 가지고 연구를 하실 수 있겠습니다.

### 3. 마치는 글

짧은 2시간에 모든 것을 알려드릴 수 없었습니다. 이런 것이 있구나! 하고 그 다음은 선생님들께서 관심을 가지시고 찾아서 익히셔야 할 것입니다. 여기에 참고할 곳을 알려드리겠습니다. 엑셀 VBA, 오픈소스 프로그램인 R, SAGE도 관심을 가지고 익히시면 좋겠습니다.

<참고>

2016 수학적 사고의 시각화와 산출물 제작에 대하여(세종특별자치시교육청) :

<https://goo.gl/sRC3xP>

민은기 선생님의 수학자료실 : <http://min7014.iptime.org>

facebook : <http://www.facebook.com/min7014>

facebook page : <https://www.facebook.com/mineungimath>

2016 강원도 중등수학교사 1급정교사 자격연수 : <http://goo.gl/hb8Vwl>

2015 제 3회 수학교사한마당 분과강연 발표자료(민은기) : <http://me2.do/xluZy8b0>

R : <http://www.sagemath.org/>

SAGE : <http://www.r-project.org/>